（ 続紙 １ ）

京都大学	博士（　人間・環境学　）	氏名	伊縫寛治
論文題目	Study of the fractals generated by contractive mappings and their dimensions（縮小写像により生成されるフラクタルとそれらの次元に関する研究）		

（論文内容の要旨）

本論文ではフラクタル集合とフラクタル幾何学を扱う。そのなかでも特に様々な種類の反復関数系の極限集合を扱う。

一般に、自然界において、カリフラワー、樹木、山肌、稲妻、雲の輪郭、など、細部を拡大すると全体と似る性質、いわゆる「自己相似性」と呼ばれる性質を持つ複雑な図形が非常に多く存在しており、それらを総称して「フラクタル」と呼ぶことがある。

これらは、物事がある規則に基づいて時間とともに変化していくシステムにおいて、その極限状態に出現すると考えられている。フラクタル集合は、大変に複雑な形状を持ちうることから、解析が難しい。実際に、このような図形は滑らかでは全くない。

しかし１９７０年代半ばよりB. Mandelbrot氏によりフラクタル幾何学が創設され、そのような集合の解析の重要性が認識されてから、フラクタル集合は数学の表舞台に登場することとなり、その様々な解析方法が提案され、フラクタルに関する理論の飛躍的な発展が現在に至るまで続いている。なお、上記に述べたような、自己相似性を持つ構造は純粋数学においても様々な文脈で登場している。この論文では、フラクタル集合の数学的モデルとして扱われ、それ自身が数学のなかでも重要な役割を果たすと考えられている、「反復関数系（複数の縮小写像のなす族）の極限集合」を取り上げている。

本論文には大きく分けて以下の５つの部分（１）—（５）がある。（１）一般化複素連分数展開に付随する無限等角反復関数系の極限集合のハウスドルフ次元（２）一般化複素連分数展開に付随する無限等角反復関数系の極限集合のハウスドルフ次元におけるハウスドルフ測度が０であることとパッキング測度が正であること（３）上記の極限集合のハウスドルフ次元におけるパッキング測度が有限であること（４）非自励系反復関数系の一般論の展開（５）有限反復関数系のエントロピーと極限集合のハウスドルフ次元の評価。

上記の（１）—（５）を説明する。（１）では一般化連分数展開に付随する無限等角反復関数系の解析的族を新たに導入したうえで、D. MauldinとM. Urbanskiによる先行研究を大幅に拡張し、各パラメータ τ に付随する反復関数系の極限集合 $J(\tau)$ のハウスドルフ次元 $h(\tau)$ が τ に関するパラメータ空間 A で連続であり、その内部で実解析的でかつ劣調和であること、A 内の各点 τ で $1<h(\tau)<2$ であること、A において τ の絶対値が無限に発散するときに $h(\tau)$ が 1 に収束すること、A 上の $h(\tau)$ の最大値が存在してそれは A の境界上で取られること、を示した。その証明においては反復関数系の圧力関数と呼ばれる微分に関係した関数の解析を用い、その関数が唯一の零点を持つことを示すことが鍵となる。なお、そのような零点は、存在すれば、それが考えている反復関数系の極限集合のハウスドルフ次元に等しいことが先行研究から知られている。これらの結果と証明は第２章、第３章で説明されており、論文としてまとめられてDiscrete and Continuous Dynamical Systems Ser. A. という雑誌に査読有論文として出版されている。この論文は３名による共著論文で、伊縫氏が責任著者である。

（２）では上記の無限等角反復関数系を扱い、A 内の各点 τ において、極限集合 $J(\tau)$ の $h(\tau)$ 次元のハウスドルフ測度が0となることを示した。これは有限等角反復関数系では現れない、無限等角反復関数系特有の新しい現象である。また、$J(\tau)$ の $h(\tau)$ 次元のパッキング測度が正であることを示した。証明においては、（１）の証明において

示された、圧力関数の零点の存在から考えることのできる「等角測度」と呼ばれる極限集合上の良い確率測度を用いる。これらは第４章で説明されており、すでに論文としてまとめられて雑誌Journal of Difference Equations and Applications に査読有論文として掲載決定となっている。この論文は２名の共著論文であり、伊縫氏がその責任著者である。
（３）では上記の無限等角反復関数系について、A 内の各点τについて極限集合 J(τ) の h(τ) 次元パッキング測度が有限であり、かつ J(τ) のハウスドルフ次元とパッキング次元が等しいことを示した。この結果は第４章で扱われており、それをまとめたものを伊縫氏が角との共著論文として執筆中である。この論文についても伊縫氏が責任著者である。
（４）では、コンパクトとは限らない完備距離空間上での非自励系反復関数系の一般論を構築し、極限集合の存在や収束性、ある条件下で収束が指数関数的に早いこと、極限測度の存在と収束性などを示した。これらの結果は第５章で扱われており、それをまとめたものを伊縫氏の単著論文として伊縫氏が現在執筆中である。
（５）では、開集合条件を仮定しないオーバーラップを許す一般の有限反復関数系についてのエントロピーの概念の導入と、それを用いた極限集合のハウスドルフ次元の評価について述べている。これは第６章で扱われている。

（続紙 ２ ）

（論文審査の結果の要旨）

論文内容の要旨における各（１）－（５)についてそれぞれの項目における論文の新規性、重要性と伊縫氏の果たした役割について述べる。

まず（１）（２）（３）については、D. Mauldin とM. Urbanskiが、先行研究で一つのτ(τ=i) について複素連分数展開に付随する無限等角反復関数系を考えて、その極限集合のハウスドルフ次元、パッキング次元、ハウスドルフ測度、パッキング測度について結果を出していたのに対し、本論文ではあるパラメータ空間を設定し、その空間に属する非可算無限個のτについて付随する無限等角反復関数系の極限集合の次元や測度を考察したところに新しさがある。また、τを動かしたときの極限集合のハウスドルフ次元の極限、連続性、実解析性、劣調和性、最大値の話は、D. Mauldin とM. Urbanskiらによる先行研究では全く扱われていなかった新しい内容である。

（１）の舞台設定と連続性などに関わる話は角研究室に属していた以前の大学院生の修士論文で若干扱われていたが、その証明には小さくない誤りが存在していた。それを伊縫氏は新しい手法を用いて見事に修正し、その後、無限等角反復関数系の複素解析的族の一般論を援用することにより、D. Mauldin とM. Urbanskiの研究の大幅な一般化を行うことに成功し、複素連分数展開と付随する反復関数系について新しい種類の話題を提供することとなった。（１）の内容を伊縫氏が責任著者として３名による共著論文にまとめ、Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. A. という国際専門雑誌に査読有論文として出版した。この雑誌は力学系理論、フラクタルに関する学術雑誌として世界的に高く評価されているものである。（１）の内容の論文について伊縫氏が寄与した部分は６割程度ある。

（２）（３）の内容については、やはりD. MauldinとM. Urbanskiが一つのτについてのみ結果を出していたところを、伊縫氏は設定したパラメータ空間に属する非可算個のすべてのτについて結果を示すことに成功した。その証明における計算は、τが様々な値を取るために、非常に複雑になるが、伊縫氏はそれを見通し良く緻密に行うことによって証明を完遂した。なお、（２）の結果における「極限集合のハウスドルフ次元におけるハウスドルフ測度が0となる」という主張は、有限等角反復関数系では起こりえない、無限等角反復関数系ならではの新しい現象である。伊縫氏は、この新しい現象が、設定したパラメータ空間に属する非可算個の全てのτにおいて起こることを示したことになっており、大変に重要であり、興味深い。（２）の内容を伊縫氏が責任著者として角との共著論文にまとめ、それをJournal of Difference Equations and Applicationsという国際専門雑誌に投稿し、掲載決定となっている。（３）の内容については現在伊縫氏が責任著者として角との共著論文を執筆中である。（２）（３）について、伊縫氏が研究と論文作成に寄与した部分はいずれも８割程度ある。

（４）の内容については、全て伊縫氏の独自のアイデアによるものである。コンパクトとは限らない一般の完備距離空間上での非自励系反復関数系の理論を初めて展開しており、非常に興味深い例を多く発見し、全く新しい分野を開拓しはじめている。特に、システムの各写像の固定点を集めた集合が非有界となっている場合でも極限集

合の存在が言えることやその極限集合に集合列が指数関数的に早く収束すること、極限測度の存在やその測度に測度列が指数関数的に早く収束すること、などは大変に興味深い内容であり、極めて斬新な内容である。証明においては、Barnsleyの作用素や測度空間上の作用素の非自励系版に対して、「Banachの不動点定理」の非自励系版を示すという方法を用いており、この手法が新しく画期的であり、伊縫氏のアイデアの独創性が活かされている。具体例として、既存の反復関数系の理論に関係する重要なものや、全く新しいタイプのものが多数発見されており、今後の理論発展が楽しみである。伊縫氏は（４）の内容をまとめて単著論文として現在執筆中である。

（５）においては、「有限反復関数系のエントロピー」という全く新しい概念を提出し、それを用いて開集合条件などを仮定しない、オーバーラップを許す反復関数系についてその極限集合のハウスドルフ次元の上からの評価を与えている。この理論については多くの適用例が考えられ、今後の発展が期待される。これは角との共同研究であるが伊縫氏の研究上の寄与は６割程度ある。

以上から、（１）から（５）のいずれの内容においても、伊縫氏は研究上本質的な寄与を行い、氏の独創的なアイデアを活かして多くの画期的な興味深い結果を導き出すに至っているといえる。また各研究の今後の発展も非常に期待できる。

よって、本論文は博士（人間・環境学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和２年１月２０日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　令和　　　年　　　月　　　日以降